Repetition från igår

Formel för

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \ldots\ldots$$

användbar för $n = 2, 3$

nov 19-09:53

Användbar för att
se att
- $\det A = \det A^t$
$\Rightarrow \det A$ är
multilinjär och
alternerande i
raderna också.

nov 19-09:54

Kunde använda för att beräkna det A med Gausselimination

$A \xrightarrow{G.E}$ 

nov 19-09:54

Tolka $\det A$ geometriskt som volymsförändring

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ med matris A

$$\operatorname{vol}(T(\Omega)) = |\det A| \operatorname{vol}(\Omega)$$

nov 19-09:54

Tecknet tas om ifall T byter orientering

höger ⟷ vänster

nov 19-09:54

Se på exempel

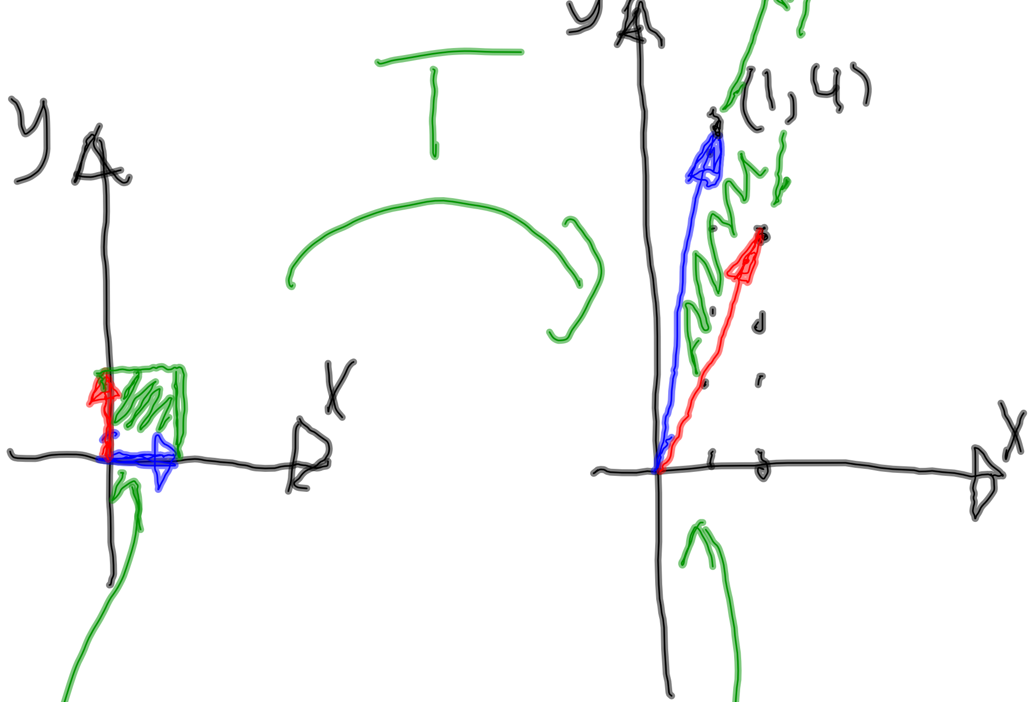
$T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

med matris

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

nov 19-09:54

Vad gör T?



area $1 \cdot 1 = 1$

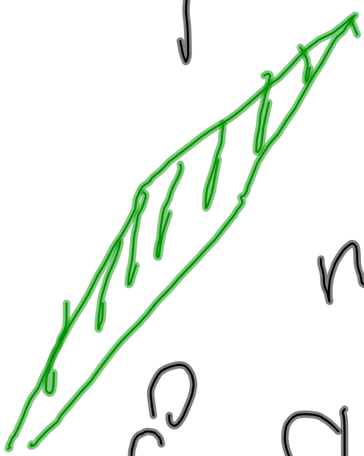
area z-koordinat för

$(1,4,0) \times (2,3,0)$ dvs: $1 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = -5$

nov 19-09:54

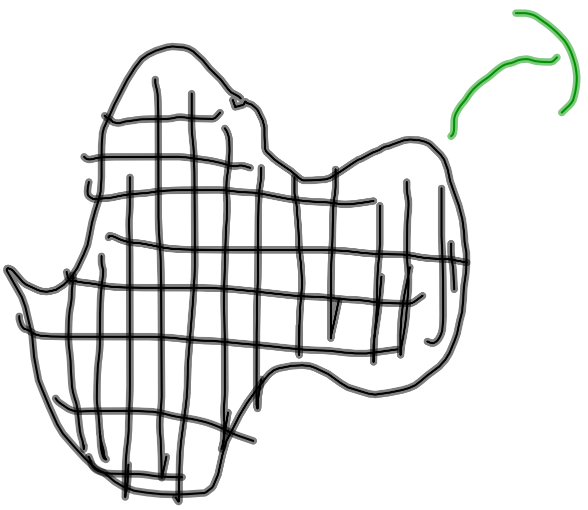
Kvadraten  blir

ett parallellogram

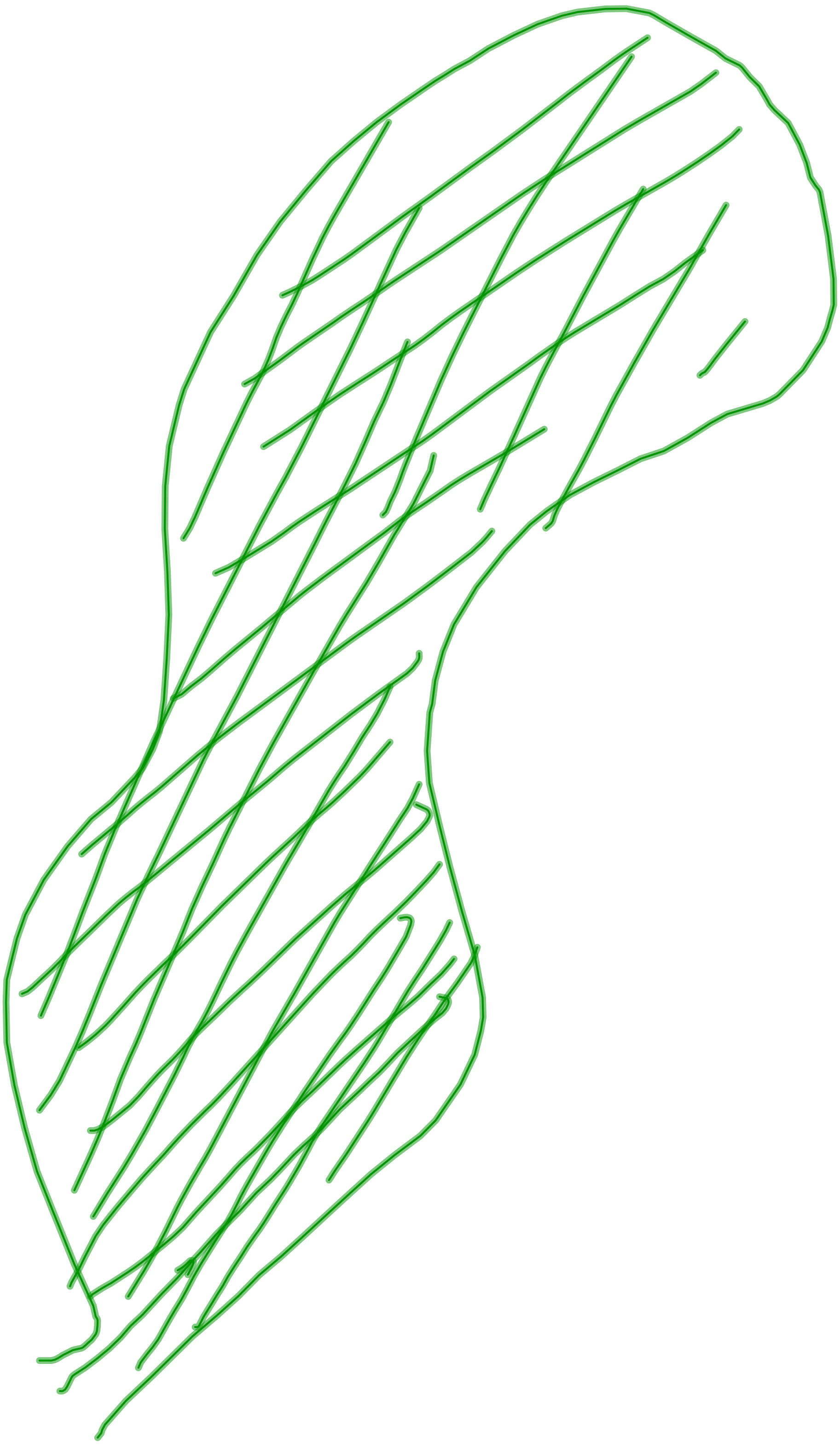


med 5 ggr så stor area.

För ett område Ω



nov 19-10:20



nov 19-10:22

Kvadratiska matriser

$n \times n$-matriser

för något $n \geq 1$

nov 19-10:25

Ekvationssystem

(1) $A\bar{x}=\bar{b}$

Det finns unik lösning till (1) för alla $\bar{b}$ $\Longleftrightarrow$

$\det(A) \neq 0$

nov 19-10:25

Börja med totalmatris

$(A \mid \bar{b})$

Gausselim. (+ Jordan)

Unik lösning $\Longleftrightarrow$ inga parametrar $\Longleftrightarrow$ red. tr. form av A är I.

nov 19-10:27

Om det inte finns
unik lösning finns
kolonn utan ledande
etta och en nollrad
i trappstegsformen
för A. $\Longrightarrow$

$$\det(A) = 0$$

nov 19-10:30

Homogena system

$A\bar{x} = 0$

har icke-triviala lösningar ($\bar{x} \neq 0$)

$\Longleftrightarrow \det(A) = 0$

nov 19-10:31

Om $\det(A) \neq 0$
finns en unik
lösning till
$A\bar{x} = 0$
som måste vara
den triviala $\bar{x} = 0$.

nov 19-10:33

1 exemplet

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$ var

$\det(A) = -5 \neq 0$

Alltså; det finns bara trivial lösn. till $A\bar{x} = 0$

nov 19-10:34

dvs

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

Dessutom, för varje högerled $\bar{b} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ kan vi finna en unik lösning till

nov 19-10:35

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = e \\ 4x_1 + 3x_2 = f \end{cases}$$

kolla med G.E.

Totalmatris

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & e \\ 4 & 3 & f \end{array}\right) \begin{array}{c} -4 \\ \downarrow \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & e \\ 0 & -5 & f-4e \end{array}\right) \boxed{\cdot \frac{1}{-5}}$$

nov 19-10:36

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & e \\ 0 & 1 & \frac{4}{5}e-\frac{1}{5}f \end{array}\right) \overset{}{\underset{-2}{}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{5}e+\frac{2}{5}f \\ 0 & 1 & \frac{4}{5}e-\frac{1}{5}f \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{5}e+\frac{2}{5}f \\ x_2 = \frac{4}{5}e-\frac{1}{5}f \end{cases}$$

nov 19-10:38

Lösningen är helt bestämd av e och f.

nov 19-10:42

Exempel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 \cdot 8 - 2 \cdot 4 = 0$$

Nu finns antingen

- ingen lösning eller
- oändligt med lösningar

till $A\bar{x} = \bar{b}$

nov 19-10:43

Vilka $\bar{b}$ fungerar?

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = e \\ 4x_1 + 8x_2 = f \end{cases}$$

Totalmatris

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & e \\ 4 & 8 & f \end{array}\right) \quad -4$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & e \\ 0 & 0 & f-4e \end{array}\right)$$

nov 19-10:45

Det finns lösning bara om $f=4e$

I så fall får vi

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & e \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

vi sätter $x_2=t$

och får $x_1=e-2t$

nov 19-10:47

Lösningen är

$$\begin{cases} x_1 = e - 2t \\ x_2 = t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

partikulär-lösning

nov 19-10:49

där $t\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ är

en lösning till

det homogena

systemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 = 0 \end{cases}$$

nov 19-10:50

Vi kan alltid få alla lösningar som

$$\bar{x} = \bar{x}_p + \bar{x}_h$$

$$A(\bar{x}_p + \bar{x}_h) = $$

$$A\bar{x}_p + A\bar{x}_h = \bar{b} + 0$$

nov 19-10:51

5.1

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + a x_3 = 1 \\ x_1 + a x_2 + 2x_3 = 3 \\ a x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

För vilka värden på a finns unik lösning, resp. ingen lösning.

nov 19-11:10

a) Först ser vi på när $\det(A) \neq 0$ (dvs då det finns en unik lösning)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 2 \\ a & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

nov 19-11:13

Beräkna det(A) med G.E.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 2 \\ a & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1) & (-a) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 2-a \\ 0 & 1-a & 4-a^2 \end{vmatrix} (1)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 2-a \\ 0 & 0 & 6-a-a^2 \end{vmatrix} = 1\cdot(a-1)\cdot(6-a-a^2)$$

nov 19-11:13

Vi ser att $a=1$ ger $\det(A)=0$ och de andra möjligheterna ges av

$$6-a-a^2=0 \iff$$

$$a^2+a-6=0 \iff$$

$$\left(a+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-6=0 \iff$$

$$\left(a+\frac{1}{2}\right)^2=6{,}25$$

nov 19-11:18

$$\Longleftrightarrow a+\frac{1}{2}=\pm 2{,}5$$

$$\Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}+\frac{5}{2},\ a=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}$$

$$\Longleftrightarrow a=-3,\ a=2$$

Alltså är $\det A=0$

$$\Longleftrightarrow a=1,-3,2$$

och $\det A\neq 0$ om

$a\neq 1, a\neq -3, a\neq 2$

nov 19-11:19

När finns ingen lösning?

Kolla de tre värden på a som ger det(A)=0.

Gör samma tre steg i G.E. även med högerledet.

nov 19-11:21

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} (-a) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -a \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (1) \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2-a \end{pmatrix}$$

nov 19-11:23

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 2-a & 2 \\ 0 & 0 & 6-a-a^2 & 2-a \end{array}\right)$$

Sätt in $a=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \quad -4$$

$$\rightarrow \text{s.r} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right)$$

nov 19-11:25

Sedan $a=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

oändligt med lösn.

Sist $a=-3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

ingen lösn.

nov 19-11:27

b) För vilka värden skär planen i en linje.

$a=2$ eftersom det är det enda som ger oändligt många lösn. och en parameter (En fri variabel)

nov 19-11:30

5.2

a) $\begin{cases} ax + by = d_1 \\ bx + ay = d_2 \end{cases}$

När finns unik lösning?

Svar: Precis då

$\det\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \neq 0$, dvs

precis då $a^2 - b^2 \neq 0$

nov 19-11:32

$\Longleftrightarrow a \neq \pm b$

Lös systemet då

$a \neq \pm b$.

Totalmatris

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & d_1 \\ b & a & d_2 \end{array}\right) \quad -b/a \quad \sim$$

(Först $a \neq 0$.)

nov 19-11:33

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & d_1 \\ 0 & a-\frac{b^2}{a} & d_2-\frac{b}{a}d_1 \end{array}\right)$$

Eftersom $a^2 \neq b^2$

är $a \neq \frac{b^2}{a}$, dvs

$$a-\frac{b^2}{a} \neq 0$$

$$x_2 = \frac{d_2-\frac{b}{a}d_1}{a-b^2/a} =$$

nov 19-11:35

$$= \frac{ad_2 - bd_1}{a^2 - b^2}$$

Sätt in i

$$ax_1 + bx_2 = d_1$$

$$x_1 = \frac{1}{a}d_1 - \frac{b}{a}x_2$$

$$= \frac{1}{a}d_1 - \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{ad_2 - bd_1}{a^2 - b^2} \right)$$

nov 19-11:37

$$= \frac{d_1(a^2-b^2)-b(ad_2-bd_1)}{a(a^2-b^2)} = \frac{(a^2-b^2+b^2)d_1-bad_2}{a(a^2-b^2)} = \frac{a^2d_1-bad_2}{a(a^2-b^2)} = \frac{ad_1-bd_2}{a^2-b^2}$$

nov 19-11:39

alltsi

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{ad_1 - bd_2}{a^2 - b^2} \\ x_2 = \dfrac{ad_2 - bd_1}{a^2 - b^2} \end{cases}$$

nov 19-11:41

Uppgift

När finns vektorer $\bar{x}$ så att $\bar{x} \neq 0$ och

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \bar{x} = a\bar{x}$$

för något a?

nov 19-11:44

Vi söker
icketrivial
lösning till

$$\begin{pmatrix} 1-a & 2 \\ 4 & 3-a \end{pmatrix} \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nov 19-11:45